

Rappels: X spectral $X \xrightarrow{\pi} \pi_0(X)$

X tot. disc. si Conditions ν :

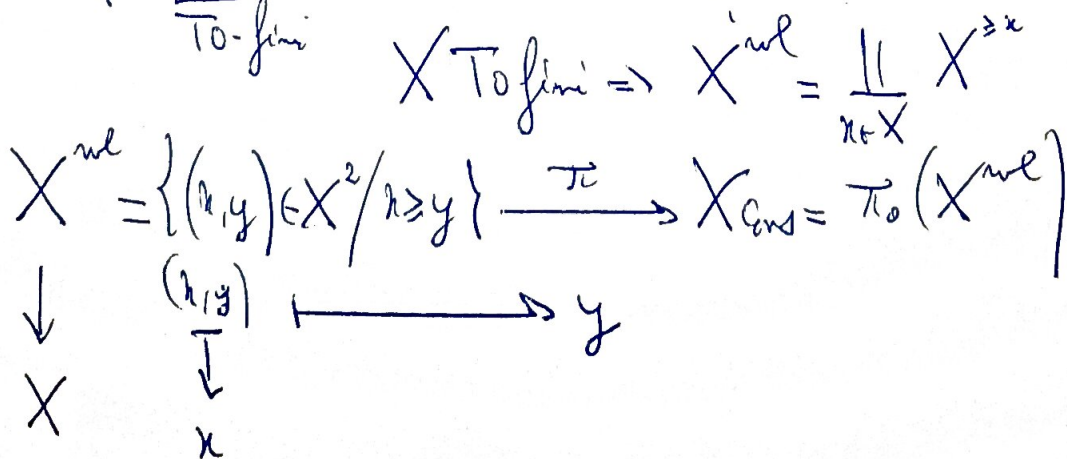
- (i) toute Comp. Connexe possède une unique point fermé i.e. fibres de $\bar{\alpha} = \{X^{\geq k} / k \in X^c\}$
- (ii) $\forall (U_i)$ recouvrement ouvert de X
 $\parallel U_i \rightarrow X$ est séparable
- (iii) $\forall \mathbb{Z} \forall i > 0 \quad H^i(X, \mathbb{Z}) = 0.$

X est dit no. local si de plus X^c est fermé.

$\mathcal{J} \xrightarrow{\text{prol}} \mathcal{J}$ possède un adjoint à droite $X_1 \rightarrow X^{\text{prol}}$
 Spectraum no. local + morphismes no. local

$$X = \varprojlim_i X_i \quad X^{\text{prol}} = \varprojlim_i X_i^{\text{prol}}$$

$X \xrightarrow{\text{To fini}} X^{\text{prol}} = \coprod_{x \in X} X^{\geq x}$



Application aux espaces perfectoides

2 PKs très particulières des espaces spectraux associés
aux espaces adiques analytiques (par ex. perfectoides)

qui ne sont pas valables pour ceux associés aux schémas.

↑ toutes les généralisations sont d'un type particulier

* X adique analytique $\Rightarrow \forall x \in X$

$$|X|_{\geq x} = \text{Spa}(b(x), b(x)^+)$$

cf. 1^{er}
articles
Huber

\downarrow
 $\forall x \in X$ $b(x)$ possède une pseudo-unif.
i.e. $b(x)^{\times\infty} \cap b(x)^{\times} \neq \emptyset$

= chaîne i.e. totalement

ordonné

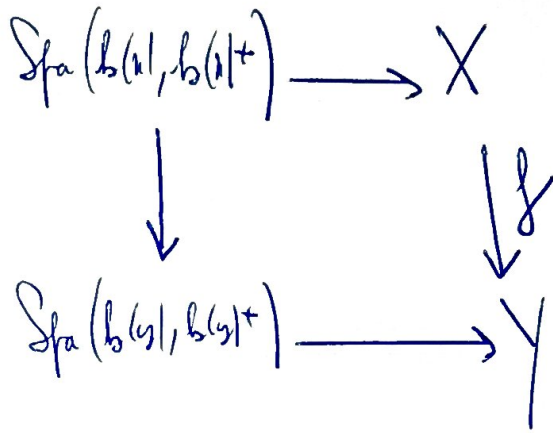
élément max. $\leftrightarrow b(x)^{\circ}$
min. $\leftrightarrow b(x)^+$

Rem. $\varinjlim_{U \ni x} U = \begin{cases} \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X & \text{schémas} \\ \text{Spa}(b(x), b(x)^+) \rightarrow X & \text{espaces adiques analytiques} \end{cases}$
 $|U| = |X|_{\geq x}$
pro-étales

* $f: X \rightarrow Y$ entre espaces adiques analytiques.

Alors $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ est généralisant. ~~est généralisant~~

En effet si $f(x)=y$



$$|\text{Spa}(b(x), b(x)^+)| = |\text{Spec}(b(x)_{\mathbb{C}}^+)|$$



$$|\text{Spa}(b(y), b(y)^+)| = |\text{Spec}(b(y)_{\mathbb{C}}^+)|$$



← surjectif car $b(y)^+$ étant un anneau de valuation
 $[b(x)^+ / b(y)^+ \text{ est plat}]$

(Pour les schémas $|\text{Spec}(O_{X,x})| \rightarrow |\text{Spec}(O_{Y,y})|$ n'est pas surjectif
 en général car $O_{X,x}$ n'est pas forcément plat sur $O_{Y,y}$ typiquement anneau de valuation de V_x)

$$\text{Spa}(b(x), b(x)^+) = \{ \text{anneaux de valuation } b(x)^+ \subset V \subset b(x)^0 \}$$

$$= \{ \text{ss. gp. Concrètes de } \mathbb{P}_x \}$$

$$= \text{Spec}(b(x)_{\mathbb{C}}^+) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(b(x)^+ / b(x)^{00}) \subset \mathfrak{p} \}$$

$$= \text{Spec}(b(x)_{\mathbb{C}}^+) \ni \mathfrak{p} \mapsto b(x)_{\mathfrak{p}} \parallel \text{certain premiers ouverts.}$$

~~...~~

En: Prop: $f: X \rightarrow Y$ dans \mathcal{I} généralisant. Alors $X \rightarrow \text{Im} f$

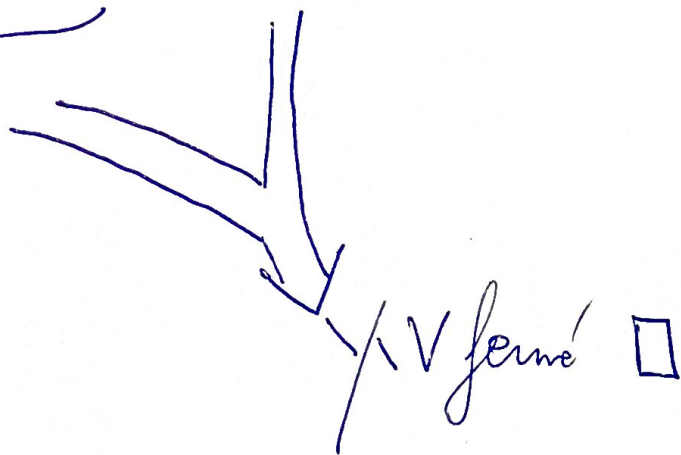
est une application quotient i.e. $X/\sim \xrightarrow{\sim} \text{Im} f$ homo.
 \uparrow
 $X \times Y$

dem. $\text{Im} f$ pro-cons \Rightarrow spectral \Rightarrow on peut supposer f surjectif.

$\forall v \in Y$ q. $f^{-1}(v)$ soit ouvert

Alors $Y \setminus v = f(\underbrace{X \setminus f^{-1}(v)}_{\text{fermé}})$ stable par spécialisation car f généralisant

$\underbrace{\text{pro-cons}}$



\Rightarrow Dans la définition de la v -topologie sur Perf, on n'a pas besoin de mettre cette condition comme dans la h -topologie de Voevodsky.

i.e. $X \xrightarrow{f} Y$ q. entre espaces perf. qcqs alors

$$|X|/\sim \xrightarrow{\sim} |\text{Im} f| \text{ homéo.}$$

et $|\text{Im} f| = \text{pro-cons. généralisant dans } Y|.$

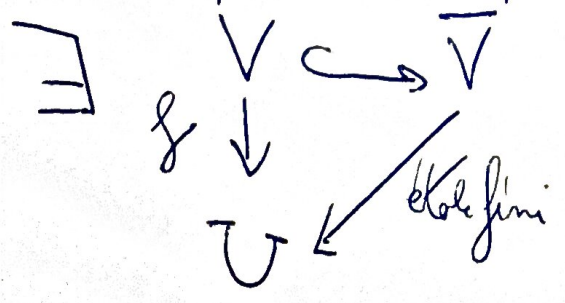
Def: * X perfectoïde est no-local, resp. tot. disc.,
 si X est qcqs et $|X|$ l'est
 i.e. $|X|$ est spectral
 * X est strictement totalement discontinu si X
 est tot. disc. et $\forall K \in X$ $b(K)$ est alg. cl.

↳ équivalent à $K(K)$ alg. cl.
 Rem: $b(K) =$ Corps valué hensélien i.e. $b(K)^\circ =$
 anneau de valuation hensélien
 $\Rightarrow b(K)$ -alg. étales \simeq $K(K)$ -alg. étales

Prop: X qcqs. Sont \sim :

- (i) X est strictement tot. disc.
- (ii) Tout $Y \xrightarrow{f} X$ étale surjectif possède une section
- (iii) $\forall \mathcal{F}$ sur X et $\forall i > 0$ $H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = 0$.

dem: ~~(i) \Rightarrow (ii)~~ Y/X étale surjectif. $x \in X$ et soit $y \in Y$ tel que $f(y) = x$



loc. au voisinage de y et x .

$$2 - \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \ni x}} \text{Ét. finis}/U \xrightarrow{\sim} b(k)\text{-alg. étales finies}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{O}_{X,x} \text{ hensélien ou alors si } U \text{ aff. parf.} \\ \text{Ét. finis}/U = (\mathcal{O}(U)^+/\omega)^a \text{- alg. étales finies} \\ \text{et } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \ni x}} \mathcal{O}(U)^+/\omega = b(k)^+/\omega \end{array} \right)$$

$b(k)$ alg. clos \Rightarrow quitte à restreindre U on peut supposer
qu'il existe une section $\begin{array}{c} \nabla \\ \downarrow \\ U \end{array}$ avec $\delta \neq y$

Alors $S|_{S^{-1}(V)}: S^{-1}(V) \rightarrow V =$ section au voisinage de x .

Vrai $\forall x \Rightarrow \exists (U_i)_i$ rec. ouvert de X au dessus duquel

Exection $\rightarrow \begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ X \end{array}$ + X bt. desc. $\Rightarrow \coprod U_i \rightarrow X$ possible une section.

(ii) \Rightarrow (i) X est tot. disc. Car $\{ \text{rec. ouverts de } X \} \subset \{ \text{rec. étalés de } X \}$

On veut montrer que $b(k)$ est alg. clos. On peut supposer X fermé
en remplaçant k par un point fermé de \overline{k} (in corps résiduel)

$L/b(k)$ finie $\rightsquigarrow V/U$ étale fini où $U = \text{voisinage ouvert de } x$
s'étend

$V \parallel X \setminus \{x\} \longrightarrow X$ possède une section $\Rightarrow L = b(k)$

(ii) \Leftrightarrow (iii) Eno. □

Construction de revêtements pro-étalés tot. disc.

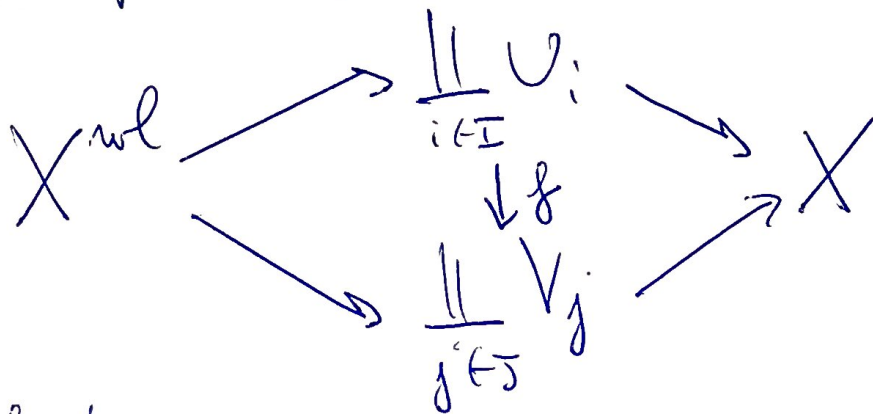
Prop: X spectral - $\mathcal{B} = \text{base d'ouverts qc stable par}$

\cap finie. $\mathcal{C} = \text{catégorie dont les objets } (U_i)_{i \in I}$
 I fini
ens. fini

$U_i \in \mathcal{B}$ et une factorisation

$$X^{\text{rel}} \longrightarrow \coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow X$$

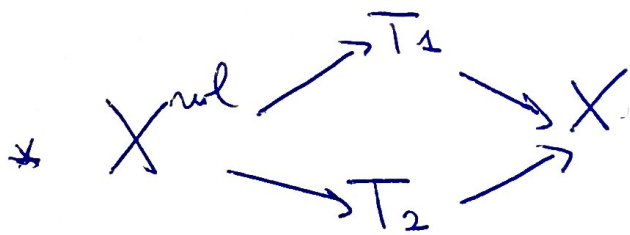
et ayant pour morphismes



où f est donné par $\alpha: I \rightarrow J$ tq. $U_i \subset V_{\alpha(i)}$

Alors $\text{Cest co-filtrante et } X^{\text{red}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\leftarrow} T \text{ où } T = \coprod U_i$

dem. Cest co-filtrante:



$$T_1 = \coprod_i U_i$$

$$T_2 = \coprod_j V_j$$

$$\text{Alors } X^{\text{red}} \longrightarrow \underbrace{T_1 \times_X T_2}_{\coprod_{i,j} U_i \cap V_j \in \mathcal{B}} \longrightarrow X$$

*

*
$$\begin{array}{ccccc}
 X^{ul} & \xrightarrow{\quad} & T_1 & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & \searrow & \downarrow f \downarrow g & \nearrow & \\
 & & T_2 & \nearrow & \\
 & & & &
 \end{array}$$

$$T_1 = \coprod_{i \in I} U_i$$

alors $\text{eq}(f, g) := \{k \in T_1 \mid f(k) = g(k)\} = \coprod_{i \in I'} U_i$ avec $I' \subset I$

et $X^{ul} \longrightarrow \text{eq}(f, g) \longrightarrow T_1 \longrightarrow X$

* $f: X^{ul} \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{C}} T$ morphisme spectral entre espaces spectraux

[Rappel: $g: A \rightarrow B$ spectral généralisant surjectif \Rightarrow application quotient]

f homo. $\iff f$ bijectif généralisant

Exemples f généralisant:

$$\begin{array}{ccc}
 X^{ul} = \{(x, y) \in X^2 \mid x \geq y\} & \xrightarrow{\quad} & \pi_0(X^{ul}) = X_{\text{cons}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & & x
 \end{array}$$

$$\forall (x, y) \in X^{\text{rel}} \quad (X^{\text{rel}})^{\geq (x, y)} \simeq X^{\geq x}$$

$$\left\{ (a, b) \in X^{\text{rel}} \mid b = y \text{ et } a \geq x \right\}$$

i.e. $\left[X^{\text{rel}} \rightarrow X \text{ identifie les localisations} \right]$

$$* T = \coprod_i U_i: \quad X^{\text{rel}} \rightarrow T \xrightarrow{g} X \text{ objet de } \mathcal{C}$$

alors $\forall a \in T \quad T^{\geq a} \simeq X^{\geq g(a)}$ puisque $T = \coprod_i$ ouverts de X

On en déduit que $\lim_{\leftarrow e} T \xrightarrow{h} X$ identifie les localisations

$$\left(\lim_{\leftarrow e} T \right)^{\geq a} \simeq X^{\geq h(a)}$$

$$\left[\text{si } (x_i)_{i \in I} \in \lim_{\leftarrow i} A_i \text{ alors } \left(\lim_{\leftarrow i} A_i \right)^{\geq (x_i)} = \lim_{\leftarrow i} A_i^{\geq x_i} \right]$$

\lim_{\leftarrow} Spectre d'espaces Spectraux

\Rightarrow f généralisant

* Injectivité de f : On peut supposer $X \in \mathcal{B}$

(ne change pas le $\lim_{\leftarrow e} T$, syst. proj. Co-filtrée)

$$(x, y) \in X^{\text{rel}} \quad (x', y') \in X^{\text{rel}} \quad x \geq y \text{ et } x' \geq y'$$

6

$$f(x, y) = f(x', y') \implies x = x' \text{ via } X^{\text{rel}} \begin{array}{c} \xrightarrow{h} T \rightarrow X \\ \xleftarrow{e} \end{array}$$

Supposons par l'absurde que $y \neq y'$ et soit $U \in \mathcal{B}$ tq. $y \in U$ et $y' \notin U$ ou bien $y \notin U$ et $y' \in U$. Par symétrie on peut supposer que on est dans le premier cas.

$$\pi: X^{\text{rel}} \rightarrow X_{\text{cons}} = U_{\text{cons}} \sqcup (X \setminus U)_{\text{cons}} \quad \text{Car } X = U \cup (X \setminus U) \text{ partition constructible}$$

$$X^{\text{rel}} = \pi^{-1}(U_{\text{cons}}) \sqcup \pi^{-1}((X \setminus U)_{\text{cons}}) \xrightarrow{h} \underbrace{U \sqcup X}_{T} \rightarrow X$$

$$\text{alors } h(x, y) = y \in U \subset U \sqcup X$$

$$h(x', y') = y' \in X \subset U \sqcup X$$

$$\implies h(x, y) \neq h(x', y'). \text{ D'où l'injectivité.}$$

* Surjectivité de f :

Il suffit de montrer que si $X^{\text{rel}} \rightarrow T \rightarrow X$ est dans \mathcal{C}

$$t \in T \text{ tel que } t \notin \text{Im}(X^{\text{rel}} \rightarrow T) \text{ alors } \exists X^{\text{rel}} \rightarrow \tilde{T} \rightarrow T \rightarrow X$$

factorisation dans \mathcal{C} tq. $t \notin \overline{\text{Im}}(X \xrightarrow{g} T \xrightarrow{\sim} \overline{T})$.

En effet, si c'est le cas alors $\overline{\text{Im}}(X^{\text{rel}} \rightarrow T) = \overline{\text{Im}}(\varprojlim_{\leftarrow \mathcal{C}} T \rightarrow T) = \overline{T_0}$

Mais $\varprojlim_{\leftarrow \mathcal{C}} T = \varprojlim_{\leftarrow \mathcal{C}} T_0$ et $X^{\text{rel}} \twoheadrightarrow T_0$

$$\Rightarrow X^{\text{rel}} \twoheadrightarrow \varprojlim_{\leftarrow \mathcal{C}} T_0$$

↑ argument usuel de Compacité

↳ Lemme: $A \rightarrow (B_i)_{i \in I}$
 $\uparrow \uparrow \uparrow$
 Speckmann \mathcal{C} -filtrant

$$\forall i: A \twoheadrightarrow B_i \Rightarrow A \twoheadrightarrow \varprojlim_{i \in I} B_i$$

dém. $(b_i)_{i \in I} \in \varprojlim_{i \in I} B_i$, $f_i: A \rightarrow B_i$

$$f_i^{-1}(b_i) = \text{pro-cons}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(b_i) \neq \emptyset \text{ par Compacité de } A_{\text{cons}} + I \text{ } \mathcal{C}\text{-filtrant.}$$

Compact $\neq \emptyset$ de A_{cons}

* Soit donc $T = \coprod_{i \in I} U_i$ $X^{\text{rel}} \xrightarrow{g} T \rightarrow X$

et $t \in T$ tq. $t \notin \text{Im } g$

(7)

Soit $i_0 \in I$ tq. $t \in U_{i_0}$. Sous-ensemble $X^{rel} \rightarrow T$ est généralisant

$$\overline{\{t\}} \cap \overline{\text{Im}(X^{rel} \rightarrow T)} = \emptyset$$

$$g(g^{-1}(U_{i_0})) \subset U_{i_0}$$

pro-cas. disjoint de $\overline{\{t\}}$

\Downarrow q.c.

$\exists (V_j)_{j \in J}$ fini $V_j \in \mathcal{B}$ tq.

$$g(g^{-1}(U_{i_0})) \subset \bigcup_j V_j \text{ et } t \notin \bigcup_j V_j$$

On a alors une factorisation

$$X^{rel} \rightarrow \bigcup_{j \in J} V_j \amalg \bigsqcup_{i \neq i_0} U_i \rightarrow T \rightarrow X$$

Puis $\tilde{T} = \bigsqcup_{j \in J} V_j \amalg \bigsqcup_{i \neq i_0} U_i$. Le recouvrement $X^{rel} \times \tilde{T} \rightarrow X$ triviale au-dessus de $\tilde{T} \rightarrow X$

Le second sous-ensemble X^{rel} est no-local

$\Rightarrow \exists$ factorisation

$f \notin \text{Image de ce morphisme.}$

$$X^{\text{red}} \longrightarrow \bigcup_j V_j \xleftarrow{\parallel} \bigsqcup_{i \neq i_0} U_i \longrightarrow T \longrightarrow X$$

donné par le séchage.

□

Applications: * X schéma affine

$B =$ base des ouverts principaux

$$X^{\text{red}} \xrightarrow{f} X \quad \left[\begin{array}{l} \forall x \in X^{\text{red}} \quad \mathcal{O}_{X, f(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X^{\text{red}}, f(x)} \\ \mathcal{O}_{X^{\text{red}}} = |f|^{-1} \mathcal{O}_X, |f|: |X^{\text{red}}| \rightarrow |X| \end{array} \right]$$

munie d'une structure naturelle de schéma pro-étale / X.

* X affine perfectoïde $X^{\text{red}} \xrightarrow{f} X$

perfectoïde $\hat{\mathcal{L}}$ pro-étale huyckel

$$\text{avec } |X^{\text{red}}| = |X|^{\text{red}} \quad \left[\begin{array}{l} \forall x \in X^{\text{red}} \quad \text{Spa}(k(\mathcal{O}_x), k(\mathcal{O}_x)^+) \xrightarrow{\sim} \text{Spa}(k(x), k(x)^+) \\ \text{Spa}(b(\mathcal{O}_x), b(\mathcal{O}_x)^+) = \text{Spa}(b(x), b(x)^+) \end{array} \right]$$

\rightarrow prendre $B =$ base des ouverts rationnels de X.

$$|f|: |X|^{\text{red}} \rightarrow |X|$$

$$\mathcal{O}_{X^{\text{red}}/\omega}^+ = |f|^{-1} \mathcal{O}_X/\omega^+$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{X^{\text{red}}} = \left(\varprojlim_N |f|^{-1} \mathcal{O}_X/\omega^N \right) \left[\frac{1}{\omega} \right]$$

⚠: $X_{\text{rel}} \rightarrow X$ n'est pas ouvert en général
 → problèmes dans la suite.

Ex. * $\text{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{rel}} \xrightarrow{\pi} \text{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{cons}} = \text{Compactifié d'Alexandrov de } \text{Spec}(\mathbb{Z}) \text{ muni de la top. dérivée (point à l'infini) = } \{ \text{point générique de } \text{Spec}(\mathbb{Z}) \}$

$f \downarrow \{ (x,y)/x \geq y \}$

$\text{Spec}(\mathbb{Z})$

$\pi^{-1}(p) = \{ (\xi, p), (p, p) \} = \text{ouvert/fermé de } \text{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{rel}}$

$f(\pi^{-1}(p)) = \{ \xi, p \}$ pas ouvert dans $\text{Spec}(\mathbb{Z})$

* plus généralement $X_{\text{rel}} \xrightarrow{\pi} X_{\text{cons}}$

$\downarrow f$

X

$Z = \text{Constructible de } X \Rightarrow \sigma/f \text{ de } X_{\text{cons}}$

$f(\pi^{-1}(Z)) = \{ \text{généralisations de } Z \}$ pas ouvert en général.

* Plus généralement si X parfait de qps (i.e. $|X|$ spectral)
 alors on peut définir X^{wl} en remarquant que si $U \subset |X|$
 ouvert qc alors $U^{wl} \subset |X|^{wl}$ est un ouvert qc.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_{\text{cons}}) & \xrightarrow{\pi} & |X|^{wl} \rightarrow |X|_{\text{cons}} \\ & & \bigcup \\ & & U_{\text{cons}} \text{ qo/g.} \end{array}$$

Problèmes de la w -localisation:

* $X^{wl} \rightarrow X$ pas ouvert

* On veut en fait un revêtement pro-étale $Y \rightarrow X$
 ouvert avec Y strictement totalement discontinu

et contrairement à ce qui a été dit à Berbeley il ne
 suffit pas de prendre la \lim_{\leftarrow} des revêtements étales

finis de $X^{wl} \rightarrow$ marche pas car $Y \rightarrow X^{wl}$ ét. fini $\not\Rightarrow Y$ pro-étal.

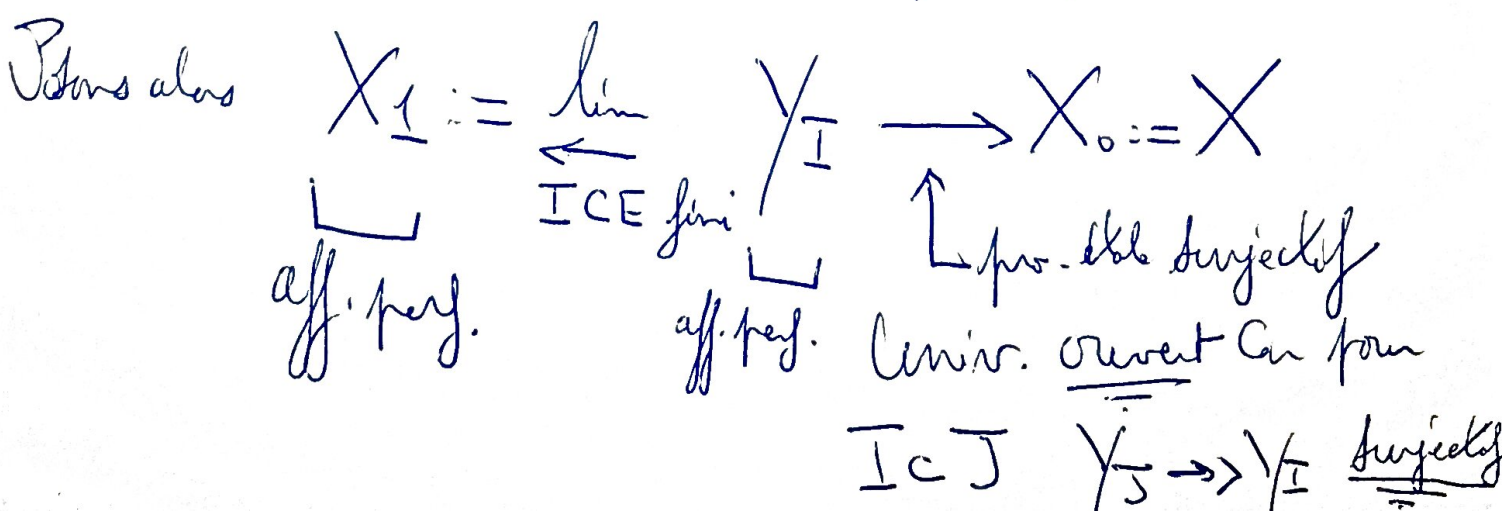
Solution (pas fonctionnelle en X contrairement à $X_1 \rightarrow X^{rel}/X$)

Prop. X perfectible qcqs. $\exists Y \rightarrow X$ pro-étale surjectif
Universellement ouvert avec Y strict. tot. discontinu.

dem. * Quitte à remplacer X par $\coprod_i U_i$, $(U_i)_i$ rec. affinoïde perf de X fini, on peut supposer X aff. perf.

* Soit $E =$ ensemble de représentants des classes d'iso. de Y/X étal surjectif avec Y affinoïde

Pour $I \subset E$ fini on pose $Y_I := Y_1 \times_X \dots \times_X Y_n$
si $I = \{Y_1/X, \dots, Y_n/X\}$



Par récurrence on définit ainsi une tour

$$X_{n+1} \twoheadrightarrow X_n \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0 = X$$

↑
pro. étale surj. univ. ouvert

$$\text{Alors } X_\infty := \varprojlim_n X_n \twoheadrightarrow X$$

strictement ét. étale.

si Z/X_∞ étale surjectif avec Z affine alors

$$\exists m \in \mathbb{N} \left[\begin{array}{l} \exists W/X_m \text{ étale surjectif avec } W \text{ affine } \& \text{q.} \\ Z = X_\infty \times_{X_m} W \end{array} \right.$$

Alors $W \times_{X_m} X_{m+1} \twoheadrightarrow X_{m+1}$ est séché par construction de $X_{m+1} \twoheadrightarrow X_m$.

$\Rightarrow Z/X_\infty$ est séché

□

Rem. Le \mathcal{Y}/X précédent n'est pas n.s. local a priori.

On a utilisé:

Lemme: $(X_i)_{i \in I}$ syst. proj. cofiltrant d'aff. perf.
 tq. $\forall i \leq j$ $X_j \rightarrow X_i$ étale surjectif. Alors $\forall i_0 \in I$
 $X_\infty := \varprojlim_i X_i \rightarrow X_{i_0}$ est ouvert.
pro-étale surjectif

→ U ouvert qc. de X_∞ . $\exists i \geq i_0 \exists V$ ouvert qc. de X_i tq.

$U = X_\infty \times_{X_i} V$ (image réciproque de V à X_∞).

$\forall j \geq i' \quad X_{j'} \rightarrow X_j \Rightarrow V = \text{Im}(U \rightarrow X_i)$

$\Rightarrow \text{Im}(U \rightarrow X_{i_0}) = \text{Im}(V \rightarrow X_{i_0}) = \text{ouvert}$ □
↑ étale ⇒

On a également utilisé:

Lemme: $(X_i)_{i \in I}$ syst. proj. co-filtrant d'aff. perf. $X_\infty := \varprojlim_i X_i$.

Alors $2\text{-}\varprojlim_{i \in I} \text{Étals qcqs}/X_i \xrightarrow{\sim} \text{Étals qcqs}/X_\infty$.

→ $2\text{-}\varprojlim_i \text{ouverts qc. de } X_i \xrightarrow{\sim} \text{ouverts qc. de } X_\infty$ (1)

Résulte de deux résultats:

→ $2\text{-}\varprojlim_i \text{Ét. finies}/X_i \xrightarrow{\sim} \text{Ét. finies}/X_\infty$. (2)

Point(1): immédiat car $|X_\infty| = \varprojlim_{i \in \mathbb{I}} |X_i|$

Par ex. si $X_i = \text{Spa}(R_i, R_i^+)$ $\mathcal{K}_i = \text{Sff}(R_i^+)$, $\mathcal{K}_\infty = \varprojlim_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{K}_i$

$$|X_i| = \varprojlim_{\tilde{\mathcal{K}}_i \rightarrow \mathcal{K}_i} |\tilde{\mathcal{K}}_i|$$

$\tilde{\mathcal{K}}_i \rightarrow \mathcal{K}_i$

↑ éclatement formel ω -admissible

$$|X_\infty| = \varprojlim_{\tilde{\mathcal{K}}_\infty \rightarrow \mathcal{K}_\infty} |\tilde{\mathcal{K}}_\infty| = \varprojlim_i \varprojlim_{\tilde{\mathcal{K}}_i \rightarrow \mathcal{K}_i} |\tilde{\mathcal{K}}_i|$$

↑ ω -admissible

Car tout éclatement formel admissible de \mathcal{K}_∞ provient d'un niveau fini.

→ [cf. mon livre sur les deux tours où il y a plein de choses comme ça.]

Point(2): $(\varinjlim_i R_i^+, \omega) = \text{couple hensélien}$

Elbis: (A, \mathbb{I}) couple hensélien. Alors Ét. finies / $\text{Spec}(A) \setminus V(\mathbb{I})$

type fini

↓ \simeq
Ét. finies / $\text{Spec}(\hat{A}) \setminus V(\mathbb{I} \cdot \hat{A})$

ou alors propriété de Scholze: Ét. finies / $X_\infty = (R_\infty^+ / \omega)^\alpha$ -alg. ét. finies

$$= 2\text{-}\varinjlim_{i \in \mathbb{I}} (R_i^+ / \omega)^\alpha\text{-alg. ét. finies}$$

$$= 2\text{-}\varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \text{Ét. finies} / X_i$$