1

Rappels : X spectral $X \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \pi_0(X)$

X tot. disc. si conditions :

(i) toute comp. connexe possède un unique point fermé i.e. fibres de π = $\{X^{\geq x} / x \in X^c\}$

(ii) $\forall (U_i)_i$ recouvrement ouvert de X

$$\coprod_i U_i \longrightarrow X \text{ est scindé}$$

(iii) $\forall \mathcal{F} \quad \forall i > 0 \quad H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$

X est dit w-local si de plus X^c est fermé.

$$\underbrace{\mathcal{S}^{wl}}_{\substack{\text{spectraux w-locaux} \\ + \text{morphismes w-locaux}}} \longrightarrow \mathcal{S} \quad \text{possède un adjoint à droite } X \mapsto X^{wl}$$

$$X = \varprojlim_i \underbrace{X_i}_{T_0\text{-fini}} \qquad X^{wl} = \varprojlim_i X_i^{wl}$$

$$X \ T_0 \text{ fini} \Rightarrow X^{wl} = \coprod_{x \in X} X^{\geq x}$$

$$\begin{array}{ccc} X^{wl} = \{(x,y) \in X^2 / x \geq y\} & \xrightarrow{\pi} & X_{ens} = \pi_0(X^{wl}) \\ (x,y) & \longmapsto & y \\ \downarrow & & \\ x & & \end{array}$$

$X^{wl} \downarrow X$

Application aux espaces perfectoïdes

2 Ptés très particulières des espaces spectraux associés aux espaces adiques analytiques (par ex. perfectoïdes) qui ne sont pas valables pour ceux associés aux schémas.

toutes les généralisations sont d'un type particulier

* X adique analytique $\Rightarrow \forall x \in X$ $\quad |X|^{\geq x} = \mathrm{Spa}\left(k(x), k(x)^+\right)$ cf. 1er articles Huber

$= \underline{\text{chaîne}}$ i.e. totalement ordonné

$\forall x \in X$ $k(x)$ possède une pseudo-unif.
i.e. $k(x)^{\circ\circ} \cap k(x)^{\times} \neq \phi$

élément max. $\longleftrightarrow k(x)^{\circ}$
min. $\longleftrightarrow k(x)^+$

Rem. $\varprojlim_{U \ni x} U = \begin{cases} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow X & \text{schémas} \\ \mathrm{Spa}\left(k(x), k(x)^+\right) \longrightarrow X & \text{espaces adiques analytiques} \end{cases}$

$|-| = |X|^{\geq x}$

pro-étales

* $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces adiques analytiques.

Alors $|f| : |X| \longrightarrow |Y|$ est <u>généralisant</u>. ~~[illegible]~~

En effet si $f(x) = y$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spa}(k(y), k(y)^+) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {|\mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+)|} \arrow[d] & = & {|\mathrm{Spec}(k(x)^+/\varpi)|} \arrow[d, two heads] \\ {|\mathrm{Spa}(k(y), k(y)^+)|} & = & {|\mathrm{Spec}(k(y)^+/\varpi)|} \end{tikzcd}$$

surjectif car $k(y)^+$ étant un anneau de valuation $\left[k(x)^+ / k(y)^+ \text{ \underline{est plat}} \right]$

(Pour les schémas $|\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})| \to |\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})|$ n'est pas surjectif en général car $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas forcément plat sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ typiquement)

$$\mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+) = \{\text{anneaux de valuation } \overbrace{k(x)^+}^{\text{anneau de valuation de } v_x} \subset V \subset k(x)^\circ\}$$

$$= \{\text{ss. gp. convexes de } \Gamma_x\}$$

$$= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(k(x)^+) \,/\, k(x)^{\circ\circ} \subset \mathfrak{p}\}$$

$$= \mathrm{Spec}(k(x)^+/\varpi) \ni \mathfrak{p} \longmapsto k(x)^+_{\mathfrak{p}}$$

$\parallel$ (idéaux premiers ouverts).

$$k(x)^{\circ\circ} \longmapsto k(x)^\circ$$

En : [Prop : $f : X \to Y$ dans $\mathcal{J}$ généralisant. Alors $X \twoheadrightarrow \mathrm{Im} f$ est une application quotient i.e. $X/\!\sim \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$ homéo.

$\sim$: $X \times_Y X$]

dem. $\mathrm{Im} f$ pro-cons $\Rightarrow$ spectral $\Rightarrow$ on peut supposer f surjectif.

$V \subset Y$ tq. $f^{-1}(V)$ soit ouvert

Alors $Y \setminus V = \underbrace{f(\underbrace{X \setminus f^{-1}(V)}_{\text{fermé}})}_{\text{pro-cons}}$ stable par spécialisation car f généralisant

$Y \setminus V$ fermé $\square$

$\Rightarrow$ Dans la définition de la v-topologie sur Perf on n'a pas besoin de mettre cette condition comme dans la h-topologie de Voevodsky.

i.e. $X \xrightarrow{f} Y$ qc entre espaces perf. qcqs alors

$$|X|/\sim \xrightarrow{\sim} |\mathrm{Im} f| \text{ homéo.}$$

et $|\mathrm{Im} f|$ = pro-cons. généralisant dans $|Y|$.

Déf: * X perfectoïde est w-local, resp. tot. disc., si $\underbrace{X \text{ est qcqs}}_{\text{i.e. } |X| \text{ est spectral}}$ et $|X|$ l'est

* X est strictement totalement discontinu si X est tot. disc. et $\forall x \in X$ $\underbrace{k(x) \text{ est alg. clos}}$.

↳ équivalent à $K(x)$ alg. clos
$$K(x) = \widehat{k(x)}$$

Rem: $k(x)$ = corps valué hensélien i.e. $k(x)^\circ$ = anneau de valuation hensélien
$\Rightarrow$ $k(x)$-alg. étales $\xrightarrow{\sim}$ $K(x)$-alg. étales

Prop: X qcqs. Sont $\sim$:

(i) X est strictement tot. disc.

(ii) Tout $Y \xrightarrow{f} X$ étale surjectif possède une section

(iii) $\forall \mathcal{F}$ sur $X_{ét}$ $\forall i > 0$ $H^i(X_{ét}, \mathcal{F}) = 0$.

dém: (i) $\Rightarrow$ (ii) Y/X étale surjectif. $x \in X$ et soit y tq. $f(y) = x$

$\exists$
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \overline{V} \arrow[dl, "\text{étale fini}"] \\ U & \end{tikzcd}$$
loc. au voisinage de y et x.

2- $\varinjlim_{U \ni x}$ Ét. finis$/U \xrightarrow{\sim} k(x)$- alg. étales finies

($\mathcal{O}_{X,x}$ Hensélien car alors si U aff. perf.
Ét. finis$/U = \left(\mathcal{O}(U)^+/\varpi\right)^a$ - alg. étales finies
et $\varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}(U)^+/\varpi = k(x)^+/\varpi$)

$k(x)$ alg. clos $\Rightarrow$ quitte à rétrécir U on peut supposer qu'il existe une section

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] \\ U \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

avec $s(x)=y$

Alors $s_{|s^{-1}(V)} : s^{-1}(V) \longrightarrow V$ = section au voisinage de x.

Vrai $\forall x \Rightarrow \exists (U_i)_i$ rec. ouvert de X au dessus duquel

$\exists$ section

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ \coprod_i U_i \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$+ X$ tot. disc. $\Rightarrow \coprod_i U_i \to X$ possède une section.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $|X|$ est tot. disc. Car $\{$rec. ouverts de $|X|\} \subset \{$rec. étales de $X\}$

On veut montrer que $k(x)$ est alg. clos. On peut supposer x fermé en remplaçant x par un point fermé de $\overline{\{x\}}$ ($\hat{m}$ corps résiduel)

$L|k(x)$ finie $\rightsquigarrow$ V/U étale fini où U = voisinage ouvert de x.
s'étend

$$V \amalg X \setminus \{x\} \longrightarrow X$$ possède une section $\Rightarrow L = k(x)$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Exo. $\square$

Construction de revêtements pro-étales tot. disc.

Prop: X spectral - $\mathcal{B}$ = base d'ouverts qc stable par $\cap$ finie. $\mathcal{C}$ = Catégorie dont les objets $(U_i)_{i \in I}$ (I ens. fini), $U_i \in \mathcal{B}$ et une factorisation

$$X^{zl} \longrightarrow \coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow X$$

et ayant pour morphismes

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{i\in I} U_i \arrow[dr] \arrow[d, "f"] & \\ X^{nl} \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\ & \coprod_{j\in J} V_j \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où f est donné par $\alpha : I \to J$ tq. $U_i \subset V_{\alpha(i)}$

Alors C est co-filtrante et $\boxed{X^{nl} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C} T}$ où $T = \coprod_i U_i$

<u>dem.</u> C est co-filtrante :

$$\star \quad \begin{tikzcd} & T_1 \arrow[dr] & \\ X^{nl} \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\ & T_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} T_1 = \coprod_i U_i \\ T_2 = \coprod_j V_j \end{array}$$

Alors $X^{nl} \longrightarrow \underbrace{T_1 \times_X T_2}_{\coprod_{i,j} \underbrace{U_i \cap V_j}_{\in \mathcal{B}}} \longrightarrow X$

$\star$

*
$$\begin{tikzcd} & T_1 \arrow[dd, shift right, "f"'] \arrow[dd, shift left, "g"] \arrow[dr] & \\ X^{nl} \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\ & T_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad T_1 = \coprod_{i \in I} U_i$$

alors $eq(f,g) := \{x \in T_1 \,/\, f(x) = g(x)\} = \coprod_{i \in I'} U_i$ avec $I' \subset I$

et $X^{nl} \longrightarrow eq(f,g) \longrightarrow T_1 \longrightarrow X$

* $f : X^{nl} \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{C}} T$ morphisme spectrale entre espaces spectraux

[Rappel : $g : A \to B$ spectral généralisant surjectif $\Rightarrow$ application quotient]

f homéo. $\Longleftrightarrow$ f bijectif généralisant

<u>Montrons f généralisant :</u>

$$\begin{tikzcd} X^{nl} = \{(x,y) \in X^2 / x \geq y\} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(X^{nl}) = X_{Cons} \\ X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} \top & \longmapsto & y \\ \downarrow & & \\ x & & \end{matrix}$$

$$\forall (x,y) \in X^{\mathrm{rel}} \qquad \left(X^{\mathrm{rel}}\right)^{\geq (x,y)} \xrightarrow{\sim} X^{\geq x}$$

$$\left(X^{\mathrm{rel}}\right)^{\geq (x,y)} = \left\{ (a,b) \in X^{\mathrm{rel}} \,/\, b = y \text{ et } a \geq x \right\}$$

i.e. $\left[X^{\mathrm{rel}} \twoheadrightarrow X \text{ identifie les localisations} \right]$

$*$ $T = \coprod_i U_i$ $\qquad X^{\mathrm{rel}} \longrightarrow T \xrightarrow{g} X$ objet de $\mathcal{C}$

alors $\forall a \in T$ $\qquad T^{\geq a} \xrightarrow{\sim} X^{\geq g(a)}$ puisque $T = \coprod_i$ ouverts de X

On en déduit que $\varprojlim_{\mathcal{C}} T \xrightarrow{h} X$ identifie les localisations

$$\left(\varprojlim_{\mathcal{C}} T \right)^{\geq a} \xrightarrow{\sim} X^{\geq h(a)}$$

$$\left[\text{si } (x_i)_{i \in I} \in \underbrace{\varprojlim_i A_i}_{\varprojlim \text{ spectral d'espaces spectraux}} \text{ alors } \left(\varprojlim_i A_i \right)^{\geq (x_i)_i} = \varprojlim_i A_i^{\geq x_i} \right]$$

$\Rightarrow$ <u>f généralisant</u>

$*$ <u>Injectivité de f :</u> On peut supposer $X \in \mathcal{B}$

(ne change pas la $\varprojlim T$, syst. proj. co-finaux)

$(x,y) \in X^{nul}$ $\quad (x',y') \in X^{nul}$ $\quad x \geq y$ et $x' \geq y'$

$f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow x = x'$ via

$$\begin{tikzcd} X^{nul} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \varprojlim_{\mathcal{C}} T \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Supposons par l'absurde que $y \neq y'$ et soit $U \in \mathcal{B}$ tq. $y \in U$ et $y' \notin U$ ou bien $y \notin U$ et $y' \in U$. Par symétrie on peut supposer qu'on est dans le premier cas.

$$\pi : X^{nul} \longrightarrow X_{cons} = U_{cons} \amalg (X \setminus U)_{cons}$$ car $X = U \cup (X \setminus U)$ partition constructible

$$X^{nul} = \pi^{-1}(U_{cons}) \amalg \pi^{-1}((X \setminus U)_{cons}) \xrightarrow{h} \underbrace{U \amalg X}_{T} \longrightarrow X$$

alors $h(x,y) = y \in U \subset U \amalg X$

$h(x',y') = y' \in X \subset U \amalg X$

$\Rightarrow h(x,y) \neq h(x',y')$. D'où l'injectivité.

* <u>Surjectivité de f</u> :

Il suffit de montrer que si $X^{nul} \to T \to X$ est dans $\mathcal{C}$

$t \in T$ tel que $t \notin \mathrm{Im}(X^{nul} \to T)$ alors $\exists\, X^{nul} \to \tilde{T} \to T \to X$

factorisation dans $\mathcal{C}$ tq. $t \notin \mathrm{Im}\left(\cancel{X^{nl}} \tilde{T} \to T\right)$.

En effet, si c'est le cas alors $\mathrm{Im}\left(X^{nl} \to T\right) = \mathrm{Im}\left(\varprojlim_{\mathcal{C}} T \to T\right) := T_0$

Mais $\varprojlim_{\mathcal{C}} T = \varprojlim_{\mathcal{C}} T_0$ et $X^{nl} \twoheadrightarrow T_0$

$$\Rightarrow X^{nl} \twoheadrightarrow \varprojlim_{\mathcal{C}} T_0$$

argument usuel de compacité

Lemme : $A \to (B_i)_{i \in I}$ co-filtrant, spectraux

$\forall i \; A \twoheadrightarrow B_i \Rightarrow A \twoheadrightarrow \varprojlim_{i \in I} B_i$

dem. $(b_i)_{i \in I} \in \varprojlim_{i \in I} B_i$, $f_i : A \to B_i$

$f_i^{-1}(b_i) = $ pro-cons

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} \underbrace{f_i^{-1}(b_i)}_{\text{Compact} \neq \phi \text{ de } A_{cons}} \neq \phi$ par compacité de A_{cons} + I co-filtrant.

* Soit donc $T = \coprod_{i \in I} U_i \qquad X^{nl} \xrightarrow{g} T \to X$

et $t \in T$ tq. $t \notin \mathrm{Im}\, g$

Soit $i_0 \in I$ tq. $t \in U_{i_0}$. Puisque $X^{w\ell} \to T$ est généralisant

$$\overline{\{t\}} \cap \mathrm{Im}\left(X^{w\ell} \to T\right) = \emptyset$$

$$\underbrace{g\left(g^{-1}(U_{i_0})\right)}_{\text{pro-cons. disjoint de } \overline{\{t\}}} \subset U_{i_0}$$

$\Downarrow$ q.c.

$$\exists (V_j)_{j \in J} \text{ fini} \quad V_j \in \mathcal{B} \text{ tq.}$$

$$g\left(g^{-1}(U_{i_0})\right) \subset \bigcup_j V_j \quad \text{et} \quad t \notin \bigcup_j V_j$$

On a alors une factorisation

$$X^{w\ell} \longrightarrow \bigcup_{j \in J} V_j \sqcup \coprod_{i \neq i_0} U_i \longrightarrow T \to X$$

Posons $\widetilde{T} = \coprod_{j \in J} V_j \sqcup \coprod_{i \neq i_0} U_i$. Le recouvrement

$$\begin{array}{c} X^{w\ell} \times_X \widetilde{T} \\ \downarrow \\ X^{w\ell} \end{array}$$

tiré en arrière à $X^{w\ell}$ de $\widetilde{T} \to X$

se scinde puisque $X^{w\ell}$ est w-local

$\Longrightarrow \exists$ factorisation

$t \notin$ Image de ce morphisme.

$$\begin{tikzcd} X^{wl} \arrow[r] \arrow[dr] & \bigcup_j V_j \amalg \coprod_{i \neq i_0} U_i \arrow[r] & T \arrow[r] & X \\ & \tilde{T} \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

donné par le scindage. $\square$

<u>Applications</u>: $*$ X schéma affine

$\mathcal{B}$ = base des ouverts principaux

$$\underbrace{X^{wl}}_{} \xrightarrow{f} X \qquad \left[\begin{array}{l} \forall x \in X^{wl} \quad \mathcal{O}_{X, f(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X^{wl}, x} \\ \mathcal{O}_{X^{wl}} = |f|^{-1}\mathcal{O}_X , \ |f| : |X|^{wl} \to |X| \end{array} \right]$$

muni d'une structure naturelle de schéma pro-étale$/X$.

$*$ X affinoïde perfectoïde $\quad \underbrace{X^{wl}}_{\text{perfectoïde}} \xrightarrow{f} X$

$\llcorner$ pro-étale surjectif

avec $|X^{wl}| = |X|^{wl}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \forall x \in X^{wl} \quad \mathrm{Spa}(K(f(x)), K(f(x))^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(K(x), K(x)^+) \\ \qquad\qquad \mathrm{Spa}(k(f(x)), k(f(x))^+) = \mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+) \end{array} \right]$

$\longrightarrow$ prendre $\mathcal{B}$ = base des ouverts rationnels de X.

$|f| : |X|^{wl} \to |X| \qquad \mathcal{O}^+_{X^{wl}}/\varpi = |f|^{-1}\mathcal{O}^+_X/\varpi$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{X^{wl}} = \left(\varprojlim_N |f|^{-1}\mathcal{O}^+_X/\varpi^N \right)\left[\tfrac{1}{\varpi}\right]$$

⚠ : $X^{cul} \twoheadrightarrow X$ n'est pas ouvert en général

→ problèmes dans la suite.

Ex. : *

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{cul} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{cons} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{cul} = \{(x,y) / x \geq y\}$

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{cons}$ = Compactifié d'Alexandrov de $\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})$ muni de la top. discrète (point à l'∞ = ξ point générique de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$)

$\pi^{-1}(p) = \{(\xi, p), (p,p)\}$ = ouvert/fermé de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{cul}$

$f(\pi^{-1}(p)) = \{\xi, p\}$ pas ouvert dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$

* plus généralement

$$\begin{array}{ccc} X_{cul} & \xrightarrow{\pi} & X_{cons} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ X & & \end{array}$$

Z = constructible de X ⇒ o/f de X_{cons}

$f(\pi^{-1}(Z)) = \{$généralisations de $Z\}$ pas ouvert en général.

* Plus généralement si X perfectoïde qcqs (i.e. $|X|$ spectral) alors on peut définir X^{wl} en remarquant que si $U \subset |X|$ ouvert qc alors $U^{wl} \subset |X|^{wl}$ est un ouvert qc.

$$\underset{\pi^{-1}(U_{cons})}{\overset{\|}{}} \qquad \pi : |X|^{wl} \to \underset{\underset{U_{cons}\ \text{O/f.}}{\cup}}{|X|_{cons}}$$

<u>Problèmes de la w-localisation :</u>

* $X^{wl} \to X$ pas ouvert

* On veut en fait un recouvrement pro-étale $Y \to X$ ouvert avec Y <u>strictement</u> totalement discontinu

et contrairement à ce qui a été dit à Berkeley il ne suffit pas de prendre la $\varprojlim$ des revêtements étales finis de X^{wl} → marche pas car $Y \to X^{wl}$ ét. fini $\not\Rightarrow$ Y w-local.

Solution (pas fonctorielle en X contrairement à $X \mapsto X^{\mathrm{pro\acute{e}t}}/X$)

<u>Prop</u>: X perfectoïde qcqs. $\exists\, Y \to X$ pro-étale surjectif universellement ouvert avec Y strict. tot. discontinu.

<u>dem</u>: * Quitte à remplacer X par $\coprod_i U_i$, $(U_i)_i$ rec. affinoïde perf de X fini, on peut supposer X aff. perf.

* Soit $E = \underbrace{\text{ensemble}}_{\hookrightarrow \text{facile}}$ de représentants des classes d'iso. de Y/X étale surjectif avec Y affinoïde

Pour $I \subset E$ fini on pose $Y_I := Y_1 \times_X \cdots \times_X Y_n$

si $I = \{Y_1/X, \dots, Y_n/X\}$

Posons alors $\underbrace{X_1}_{\text{aff. perf.}} := \varprojlim_{I \subset E \text{ fini}} \underbrace{Y_I}_{\text{aff. perf.}} \longrightarrow X_0 := X$

$\hookrightarrow$ pro-étale surjectif univ. <u>ouvert</u> car pour $I \subset J$ $Y_J \twoheadrightarrow Y_I$ <u>surjectif</u>

Par récurrence on définit ainsi une tour

$$X_{n+1} \twoheadrightarrow X_n \twoheadrightarrow \cdots\cdots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0 = X$$

pro. étale surj. univ. ouvert

Alors $\underbrace{X_\infty}_{} := \varprojlim_n X_n \twoheadrightarrow X$

strictement tot. disc.

si Z/X_∞ étale surjectif avec Z affinoïde alors

$\exists n \in \mathbb{N}$ $\left[\begin{array}{l} \exists\, W/X_n \text{ étale surjectif avec } W \text{ affinoïde tq.} \\ Z = X_\infty \times_{X_n} W \end{array}\right.$

Alors $W \times_{X_n} X_{n+1} \twoheadrightarrow X_{n+1}$ est scindé par construction de $X_{n+1} \twoheadrightarrow X_n$.

$\Rightarrow Z/X_\infty$ est scindé

$\square$

Rem. Le Y/X précédent n'est pas pro-local a priori.

On a utilisé :

Lemme : $(X_i)_{i\in I}$ syst. proj. cofiltrant d'aff. parf. tq. $\forall i \leq j$ $X_j \twoheadrightarrow X_i$ étale surjectif. Alors $\forall i_0 \in I$

$$X_\infty := \varprojlim_i X_i \xrightarrow[\text{pro-étale surjectif}]{} X_{i_0} \text{ est ouvert.}$$

$\longrightarrow$ U ouvert qc. de X_∞. $\exists i \geq i_0$ $\exists V$ ouvert qc de X_i tq.

$$U = X_\infty \times_{X_i} V \qquad (\text{image réciproque de } V \text{ à } X_\infty).$$

$$\forall j \geq j' \quad X_{j'} \twoheadrightarrow X_j \Rightarrow V = \mathrm{Im}(U \to X_i)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(U \to X_{i_0}) = \mathrm{Im}(\underbrace{V \to X_{i_0}}_{\text{étale}}) \overset{\Rightarrow}{=} \text{ouvert} \qquad \square$$

On a également utilisé :

Lemme : $(X_i)_{i\in I}$ syst. proj. co-filtrant d'aff. parf. $X_\infty := \varprojlim_i X_i$.

Alors $2\text{-}\varinjlim_{i\in I}$ Étales qcqs$/X_i \xrightarrow{\sim}$ Étales qcqs$/X_\infty$.

Résulte de deux résultats :

$\longrightarrow$ $2\text{-}\varinjlim_i$ ouverts qc. de $X_i \xrightarrow{\sim}$ ouverts qc de X_∞ (1)

$\longrightarrow$ $2\text{-}\varinjlim_i$ Ét. finis $/X_i \xrightarrow{\sim}$ Ét finis $/X_\infty$. (2)

Point (1) : immédiat car $|X_\infty| = \varprojlim_{i\in I} |X_i|$

Par ex. si $X_i = \mathrm{Spa}(R_i, R_i^+)$ $\quad \mathfrak{X}_i = \mathrm{Spf}(R_i^+)$, $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_{i\in I} \mathfrak{X}_i$

$$|X_i| = \varprojlim_{\substack{\widetilde{\mathfrak{X}}_i \to \mathfrak{X}_i \\ \uparrow \text{ éclatement formel } \varpi\text{-admissible}}} |\widetilde{\mathfrak{X}}_i|$$

$$|X_\infty| = \varprojlim_{\substack{\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty \to \mathfrak{X}_\infty \\ \uparrow\ \varpi\text{-admissible}}} |\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty| = \varprojlim_{i} \varprojlim_{\widetilde{\mathfrak{X}}_i \to \mathfrak{X}_i} |\widetilde{\mathfrak{X}}_i|$$

Car tout éclatement formel admissible de $\mathfrak{X}_\infty$ provient d'un niveau fini. $\to$ [cf. mon livre sur les deux tours où il y a plein de choses comme ça.]

Point (2) : $\left(\varinjlim_i R_i^+, (\varpi)\right)$ = couple Hensélien

Elkik : (A, I) couple Hensélien. Alors $\text{Ét. finis}/\mathrm{Spec}(A)\setminus V(I)$
I type fini

$$\downarrow \simeq$$

$$\text{Ét. finis}/\mathrm{Spec}(\hat{A})\setminus V(I.\hat{A})$$

ou alors pureté de Scholze : $\text{Ét. finis}/X_\infty = (R_\infty^+/\varpi)^a\text{-alg. ét. finies}$

$$= 2\text{-}\varinjlim_{i\in I} (R_i^+/\varpi)^a\text{-alg. ét. finies}$$

$$= 2\text{-}\varinjlim_{i\in I} \text{Ét. finis}/X_i$$